1110. 半順序可換群ノ有界自己準同型ニツイテ

中山　正（名大）

吉田氏トノ前談話ニオイテ Vernikoff - Krein - Tovbin ノ半順序環ニツイテノ結果ガ環ト假定シナクトモ operator domain ヲモツ群トシテ出來ルコトヲ注意シマシタ（小生ガ間違ッタ証明ヲ書イタリシテ，スッカリ吉田氏ニモ御迷惑ヲカケ，マタ汗顔ノ至リデシタガ，結果ハ前記ノゴトク成立シマス）。特ニ従ッテ associativity 等仮定シナクトモヨイコトガ知レルワケデス。

シカシ訂正シタ証明ハドウモ V-K-T ノト大変似テヰテ誠ニ不甲斐ナイ話シデスガ，シカシコノ環トシナイデ，operator ヲモッ云々トスルコトニヨッテ，逆ニ半順序可換群ノ自己準同型ニツイテ一寸面白ク思ハレル事柄ガ出テ來マス。ソレヲ述ベテ見タイト思ヒマス。

G ヲ普通ノ様ナ半順序可換（加法）群トスル。タダシア

ル自然数 n ニ對シ $nx \geqq 0$ ナラ $x \geqq 0$

ヲ假定スル。Aヲソノ Automorphism（自己準同型）トスル（コヽニ群算法ノミヲ問題ニシ，順序ハタモタナイデヨイトスル）。

而シテ

$$\text{総テノ } x(\in G) \geqq 0 \text{ ニ對シ } nx \geqq x^A \geqq -nx$$

ガ成立ツヤウナ自然数 n ガ存在スルトキ，Aハ有界ナ autom. デアルトヨブコトニスル。（サウシタモノア考ヘルノハ恐ラク自然デアルト思フ）。然ラバ G ノ有界ナ autom. ノ全体ハ普通ノ

$$x^{AB} = (x^A)^B \qquad x^{A+B} = x^A + x^B,$$

及ビ

$$A \geqq 0 \text{ トハ 「} x \geqq 0 \longrightarrow x^A \geqq 0 \text{」}$$

ヲ乗加法，順序トシテ一ツノ半順序環 R_G ヲナス。所ガコヽニ

定理 G ガあるきめです単位 e ヲ有シ且ツ例ノ條件

(※) スベテノ t ニ對シ $e \geqq tx \geqq -e$ ナラバ $x=0$

ヲ満スナラバ，G ノ有界ナ autom. ノ環 R_G ハ加法群トシテハ G ノ或ル部分群ニ同型デアル。

証明： R_G ヲ G ノ作用團 Ω ト考ヘル。然ラバ前談話ノ諸條件ガミタサレテヰル。ヨッテ R_G ニ対シテ zulässig ナ G ノ極大 normal 部分群全部ノ交ハリハ 0 デアル。

今ソノ全体ヲ $\mathfrak{M}=\{M\}$ デ表ハス。アル $M\in\mathfrak{M}$ ニ對シ，G/M ハ實數群ダカラ任意ノ $x\in G$ ハ M ヲ法トシテ e ノアル實數倍ニ合同ニナル。シカモ M ハ R_G ニ対シ *zulässig* ダカラ，アル $A\in R_G$ ニ対シテ若シ e ノ像 e^A ガ $\in M$ ナラバ，G^A ノ全体ガ $\leqq M$ デアル。シタガッテ特ニ $e^A=0$ ナラ $G^A\leqq\cap M=0$，$A=0$ デアル。

シカモ $e^{A+B}=e^A+e^B$ ダカラ $A\to e^A$ ニヨリ R_G ハ G ノ部分群 $\{e^A\}$ ト同型ニナル。即チ A ハ e ノ像 e^A ノミデ一意的ニキマッテシマフ。（實際

$$e^A\equiv\omega_A(M)e \quad \mathit{mod}\ M$$

トオケバ $A\to\omega_A(M)$ ニヨリ R_G ハ $\mathfrak{M}$ ノ上ノ函數 $\{\omega_A(M)\}$ デ同型ニ表現サレル)．

次ニ一般ノ，即チ実數ヲ係數トシナイ場合ヲ考ヘルト，ソレハ例ノ如ク，マヅ $nx\geqq0\longrightarrow x\geqq0$ ノ條件カラ有理數ヲ係數ニスルモノマデ拡張出来，シカシテ更ニ $\|x\|=\mathit{inf}\,(\alpha/\alpha e\geqq x\geqq-\alpha e)$ ナルのるむニツイテ完備スレバ實數ヲ係數ニシタモノガ得ラレル（(※)ノ條件参照）．

而モ任意ノ $A\in R_G$ ハ二ツノ正ノ *operator*，例ヘバ nI，$nI-A$（I ハ恒等寫像）ノ差トシテ表ハサレルコトカラ容易ニワカル如ク，A ハコノ拡張サレタ群ニマデ拡張出来ル。シタガッテ A ハ上記ニヨリヤハリ $e^A(\in G)$ デ決

定サレ，R_G ハ $\{e^A\}$ ト同型ニナル。 (終リ)
